



Lisbon School
of Economics
& Management
Universidade de Lisboa

Estatística I

Licenciatura em Economia
2.º Ano/2.º Semestre
2023/2024

Aulas Teóricas N.º 8 e 9 (Semana 5)

Docente: Elisabete Fernandes

E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt



<https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao>



<https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/>

Conteúdos Programáticos

Aulas Teóricas (Semanas 1 a 3)

- **Capítulo 2:**
Probabilidades

Aulas Teóricas (Semanas 3 a 5)

- **Capítulo 3:** Variáveis
Aleatórias
Unidimensionais

Aulas Teóricas (Semanas 5 a 7)

- **Capítulo 4:** Variáveis
Aleatórias
Multidimensionais

Aulas Teóricas (Semanas 8 a 13)

- **Capítulo 5:**
Distribuições Teóricas
- **Capítulo 6:**
Amostragem.
Distribuições por
Amostragem.

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

<https://cas.iseg.ulisboa.pt>

Aula 5	Classificação de variáveis aleatórias. V.a. discreta: Função probabilidade: propriedades e exemplos. V.a. contínua: Função densidade de probabilidade: propriedades e exemplos.
Aula 6	V.a. mistas, exemplo. Funções de uma v.a.: método para v.a. discretas e método geral. Exemplos.
Aula 7	Funções de uma v.a. Valor esperado de uma v.a. discreta e valor esperado de uma v.a. contínua. Exemplos. Valor esperado de uma função de uma v.a.: caso discreto.
Aula 8	Propriedades do valor esperado. Momentos em relação à origem e momentos em relação à média. O valor esperado como medida de localização. Variância como medida de dispersão. Propriedades. Desvio padrão e coeficiente de variação.
Aula 9	Coeficiente de assimetria e coeficiente de kurtosis. Exemplo. Quantil de ordem alfa para distribuições contínuas. Mediana como medida de localização, amplitude inter-quartis como medida de dispersão. Exemplo.



Variáveis Aleatórias Contínuas

Variável Aleatória, Função de Distribuição, Função Densidade de Probabilidade, Valor Esperado, Moda, Variância e Quantis

1

Variável Aleatória Contínua

Definição 1.1: (Variável aleatória contínua) Uma variável aleatória X é contínua se assume valores num intervalo da reta real, ou seja, o número de valores que X pode assumir é não enumerável.

EXEMPLOS:

- Tempo até a cura de uma doença;
- Peso das peças em uma linha de produção;
- Salário dos estatísticos em João Pessoa.

Variável Aleatória Contínua

- Uma vez que os valores possíveis de X não são enumeráveis, não podemos falar do i -ésimo valor de X , e, por isso, $p(x_i)$ se torna sem sentido.
- Em vez de atribuir, como no caso discreto, probabilidades aos valores da variável, pode-se atribuir probabilidades a intervalos de valores da variável contínua por meio de uma função.
- A ideia então é substituir a função p definida somente para x_1, x_2, \dots por uma função f definida para todos os valores de x .

V.a. Contínua: Função Densidade de Probabilidade (fdp)

Para variáveis aleatórias contínuas introduzimos a **função densidade de probabilidade (fdp)**, tal que,

$$(a) f(x) \geq 0$$

$$(b) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

A condição (a) implica que a densidade é uma função não negativa e condição (b) corresponde ao fato de que a soma (integral no caso de variáveis contínuas) das probabilidades é igual a um. A integração de $\pm\infty$ significa que devemos integrar sobre todos os valores de x em que $f(x)$ é definida.

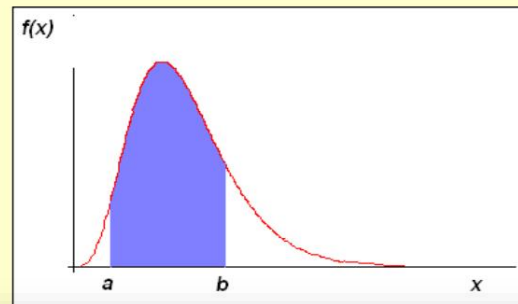
Qualquer função $f(x)$ satisfazendo (a) e (b) é uma fdp.

Note que para variáveis contínuas as somas são substituídas por integrais.

Variável Aleatória Contínua: fdp

Uma v.a. X contínua é caracterizada por sua *função densidade de probabilidade* $f(x)$, com as propriedades:

- (i) A área sob a curva de densidade é 1;
- (ii) $P(a \leq X \leq b) =$ área sob a curva da densidade $f(x)$ e acima do eixo x , entre os pontos a e b ;
- (iii) $f(x) \geq 0$, para todo x ;
- (iv) $P(X = x_0) = 0$, para x_0 fixo.



Assim

Note que, como a probabilidade da variável x assumir valor num dado ponto é nula, temos que: $P(a < x < b) = P(a \leq x \leq b) = P(a < x \leq b) = P(a \leq x < b)$

Variável Aleatória Contínua: Probabilidades

Para variáveis contínuas não podemos obter a probabilidade de x ter o valor num ponto ($x = a$), ou seja, temos que considerar a probabilidade de x assumir valores num intervalo $a < x < b$.

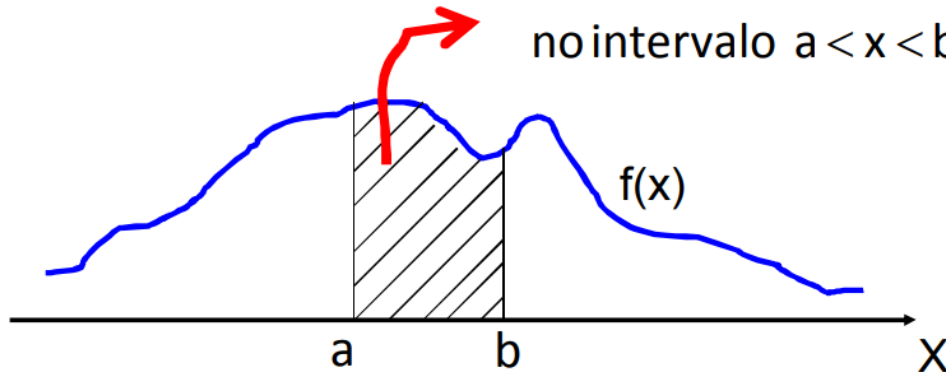
$P(a < x < b) = \int_a^b f(x) dx$ representa a probabilidade de x assumir valores no intervalo $a < x < b$.

[Tópico_08_.pdf \(usp.br\)](#)

Variável Aleatória Contínua: Probabilidades

Geometricamente

Área entre a fdp $f(x)$ e o eixo x
no intervalo $a < x < b = P(a < x < b)$



Cálculo de Probabilidades para uma Distribuição Contínua: Exemplo

Exemplo: Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & 1 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{outros valores} \end{cases}$$

(a) verifique se $f(x)$ é uma fdp.

(b) Calcule a probabilidade de X assumir valores no intervalo $2 < x < 3$



Cálculo de Probabilidades para uma Distribuição Contínua: Exemplo

(a) Temos que $f(x) \geq 0$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_1^4 \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3} x \Big|_1^4 = \frac{1}{3} (4-1) = 1$
portanto $f(x)$ é uma fdp.

(b) Temos: $P(2 < x < 3) = \int_2^3 \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3} x \Big|_2^3 = \frac{1}{3} (3-2) = \frac{1}{3}$

Tabela 1.1: Tabela de Primitivas Elementares

f	$Pf=F$
$c, c \in \mathbb{R}$	$c x$
$x^\alpha (\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$	$\log x $
e^x	e^x
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\sec^2 x$	$\operatorname{tg} x$
$\operatorname{cosec}^2 x$	$-\operatorname{cotg} x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcsin} x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\sinh x$	$\cosh x$

Média, Variância e Desvio-Padrão para V.a. Contínua

Do mesmo modo que para variáveis discretas, podemos definir para variáveis contínuas a média, a variância e o desvio padrão. Lembrando que introduzimos a fdp associada a variável aleatória considerada e substituímos as somas por integrais.

Assim, para a variável aleatória X , temos:

$$\text{Média } (\mu): \quad \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

$$\text{Variância } (\sigma^2): \quad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx$$

$$\text{Desvio-padrão:} \quad \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$$

Média, Variância e Desvio-Padrão para V.a. Contínua: Exemplo

Exemplo: Considere a fdp considerada anteriormente

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & 1 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{outros valores} \end{cases}$$

- (a) Calcule a média da variável aleatória X.
- (b) Calcule a variância e o desvio padrão de X.



Média, Variância e Desvio-Padrão para V.a. Contínua: Exemplo

(a) Temos:
$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_1^4 x \left(\frac{1}{3}\right) dx = \frac{1}{3} \int_1^4 x dx = \frac{1}{3} \left(\frac{x^2}{2}\right) \Big|_1^4 = \frac{1}{6} (4^2 - 1^2) = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

(b) Temos:
$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \int_1^4 \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right) dx = \frac{1}{3} \int_1^4 \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{3} \left(\frac{x - \frac{5}{2}}{3}\right)^3 \Big|_1^4 = \frac{3}{4}$$

e assim:
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Variável Aleatória Contínua: Função de Distribuição (fd)

Definição 1.2: (Variável aleatória absolutamente contínua) Uma variável aleatória X é absolutamente contínua se existir uma função não negativa f tal que para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt,$$

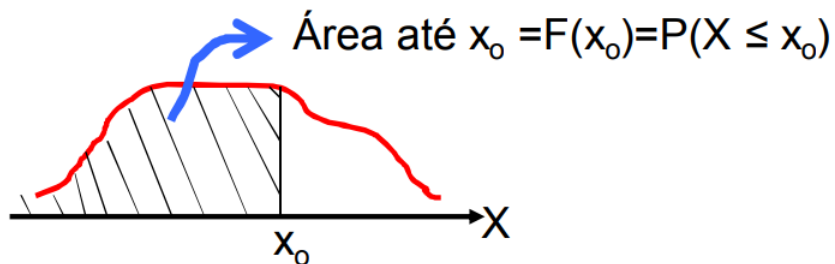
em que F é a função de distribuição acumulada e f é a função densidade da variável aleatória X .

Variável Aleatória Contínua: fd

A função distribuição acumulada (fda) $F(x)$ é a probabilidade de que $X \leq x_0$, ou seja,

$$F(x_0) = P(X \leq x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x) dx$$

$F(x)$ é análoga a distribuição de frequências relativas acumuladas (ou % acumuladas) estudadas no início do curso



Variável Aleatória Contínua: Probabilidades

IMPORTANTE: A partir da definição de função de distribuição, tem-se que

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Note que a integral acima não se altera com a inclusão ou não dos extremos a e b . Dessa forma, para as variáveis contínuas, a probabilidade da variável ser igual a um particular valor é zero.

Assim,

$$P(X(\omega) \in [a, b]) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b).$$

$P(a \leq X \leq b)$ representa a área sob a curva da função densidade entre a e b .

Variável Aleatória Contínua: fdp vs fd

IMPORTANTE: A função de densidade serve para a caracterização da variável contínua. Dada a função de densidade, a função de distribuição é obtida por integração. Por outro lado, derivando a função de distribuição, obtemos a densidade.

Ou seja, utilizando o teorema fundamental de Cálculo, se $f(x)$ for contínua, temos a seguinte relação

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

fdp vs fd: Exemplo 1

Encontre a função de distribuição acumulada da seguinte função de densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{para quaisquer outros valores} \end{cases}$$



fdp vs fd: Exemplo 1

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{para quaisquer outros valores} \end{cases}$$



$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ \int_0^x (2s) ds = x^2, & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

fdp vs fd: Exemplo 2

Arqueólogos estudaram uma certa região e mediram o *comprimento de fósseis* encontrados (em cm). Chamamos de **C** a v.a. contínua comprimento de fósseis. Suponha que C possui a função densidade de probabilidade:

$$f(c) = \begin{cases} \frac{1}{40} \left(\frac{c}{10} + 1 \right) & \text{se } 0 \leq c \leq 20; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

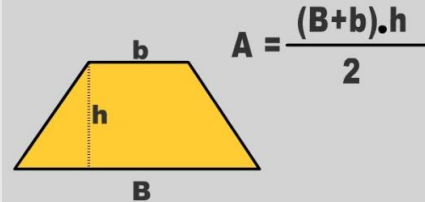
Qual a probabilidade de um fóssil, escolhido ao acaso nessa região, apresentar comprimento inferior a 8 cm?



fdp vs fd: Exemplo 2

$$f(c) = \begin{cases} \frac{1}{40} \left(\frac{c}{10} + 1 \right) & \text{se } 0 \leq c \leq 20; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

ÁREA DO TRAPÉZIO



A área do trapézio é a soma das bases vezes a altura dividido por dois.

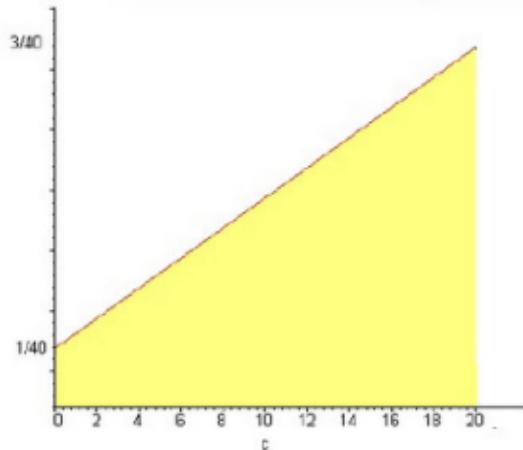


Gráfico da função densidade de probabilidade

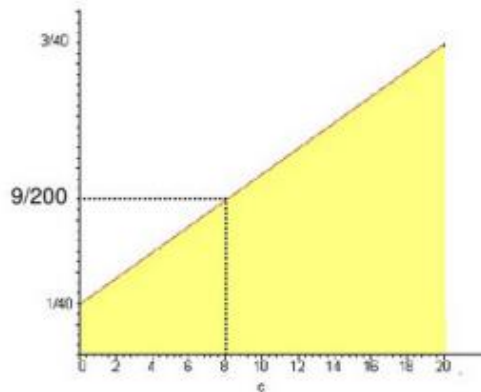
$$\text{Área sob } f(c) = \frac{(b+B)h}{2} = \frac{\left(\frac{1}{40} + \frac{3}{40}\right)20}{2} = 1$$

$$\text{Área sob } f(c) = \int_0^{20} \frac{1}{40} \left(\frac{c}{10} + 1 \right) = 1$$

- Como $f(c)$ é positiva e a área é igual 1, podemos concluir que $f(c)$ é efetivamente uma densidade.

fdp vs fd: Exemplo 2

- Qual a probabilidade de um fóssil, escolhido ao acaso nessa região, apresentar comprimento inferior a 8 cm?



$$f(8) = \frac{9}{200}$$

$$P(C < 8) = \frac{\left(\frac{1}{40} + \frac{9}{200}\right)8}{2} = \frac{7}{25}$$

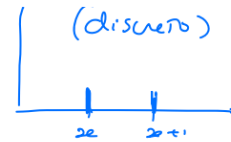
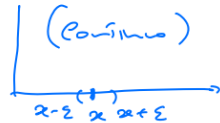
$$P(C < 8) = \int_0^8 f(c)dc = \frac{7}{25}$$

V.a. Discreta vs V.a. Contínua

seja X uma v.a. contínua, que tome valores num intervalo de \mathbb{R} (ou em \mathbb{R})

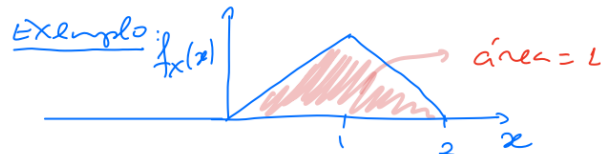
i) $P(X=x) = 0, \forall x$ [1ª grande diferença em relação às v.a. discretas]

em vez de função de probabilidade, vamos definir:



$$f_X(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P(x - \varepsilon/2 \leq X \leq x + \varepsilon/2)}{\varepsilon}$$

↳ função densidade de probabilidade



V.a. Discreta vs V.a. Contínua

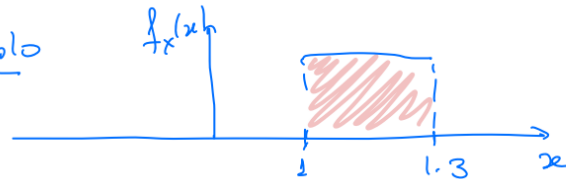
v.a. discreta

$$\left[\begin{array}{l} \text{propriedades : } P(X=x) \in [0,1] \\ \sum_{x=-\infty}^{+\infty} P(X=x) = 1 \end{array} \right]$$

v.a. contínua

$$\left[\begin{array}{l} \text{propriedades : } \bullet f_X(x) \geq 0, \forall x \\ \bullet \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1 \end{array} \right]$$

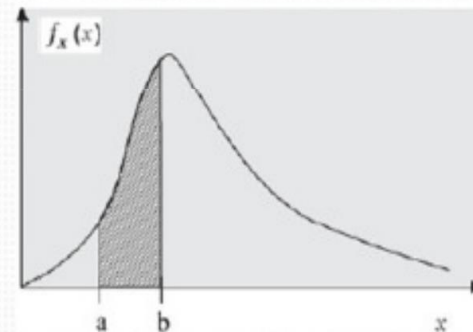
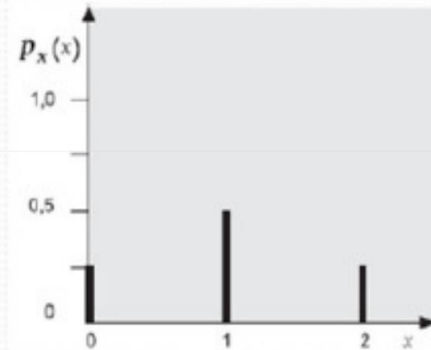
Exemplo



$$\begin{aligned} \text{difer} &= (1.3 - 1) \cdot k = 0.3 \cdot k = 1 \Rightarrow \\ k &= \frac{1}{0.3} = 3.33 \dots \end{aligned}$$

V.a. Discreta vs V.a. Contínua

- Função massa de probabilidade
 - Indica com que probabilidade a variável aleatória x assume o valor x_0 , *i.e.*, $P(x=x_0) = p_x(x_0)$.
 - A função massa de probabilidade se aplica a variáveis discretas.
- Função densidade de probabilidade
 - Equivale à função massa de probabilidade, sendo que se aplica a variáveis contínuas.



V.a. Discreta vs V.a. Contínua

$$P(X=x) \leftrightarrow f_X(x)$$
$$\Sigma \leftrightarrow \int$$

- $F_X(x) = P(X \leq x)$
 $= \sum_{y=-\infty}^x P(X=y)$

- $F_X(x) \in [0, 1]$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$

- $P(X=x) = F_X(x) - F_X(x^-)$

- Não decrescente

- $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

- $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a^-)$

- $P(a \leq X < b) = F_X(b^-) - F_X(a^-)$

- $P(a < X < b) = F_X(b^-) - F_X(a)$



$$=]-\infty, b] -]-\infty, a[$$

- $F_X(x) = P(X \leq x)$
 $= \int_{-\infty}^x f_X(y) dy$

- $F_X(x) \in [0, 1]$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$

- A função F_X é contínua
 $f_X(x) = F_X'(x)$

- Não decrescente

- $P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$

- $= P(a < X < b) = P(a \leq X < b)$

- $= F_X(b) - F_X(a)$

(porque $P(X=a) = P(X=b) = 0$)

V.a. Discreta vs V.a. Contínua

V.a. Discretas	V.a. Contínuas
<ul style="list-style-type: none"> • $E(X) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} x P(X=x)$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$
<ul style="list-style-type: none"> • $E[g(X)] = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} g(x) P(X=x)$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$
<ul style="list-style-type: none"> • $\text{Var}(X) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} x^2 P(X=x) - E^2(X)$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx - E^2(X)$
<ul style="list-style-type: none"> • $\text{Var}(X) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} x^2 P(X=x) - \left[\sum_{x=-\infty}^{+\infty} x P(X=x) \right]^2$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx - \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \right]^2$
<ul style="list-style-type: none"> • $\text{Var}(aX+b) = a^2 \text{Var}(X)$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $\text{Var}(aX+b) = a^2 \text{Var}(X)$
<ul style="list-style-type: none"> • mediana = me 	<ul style="list-style-type: none"> • mediana = me
<ul style="list-style-type: none"> • $0.5 \leq F_X(\text{me}) \leq 0.5 + P(X=\text{me})$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $F_X(\text{me}) = 0.5$
	<ul style="list-style-type: none"> • percentil de proba $P = x_p$
	<ul style="list-style-type: none"> • $F_X(x_p) = P \quad (P \in (0,1))$

Características da Distribuição

Localização/Tendência

- **Central:** Moda, Mediana, Média
- **Não central ou relativa:** Alguns Quantis (Quartis, Decis, Percentis, Mínimo, Máximo)

Dispersão

- Amplitude Total ou Amostral, Amplitude Interquartil, Variância, Desvio Padrão, Coeficiente de Variação

Assimetria

- Coeficientes de Assimetria

Achatamento/Curtose/Forma

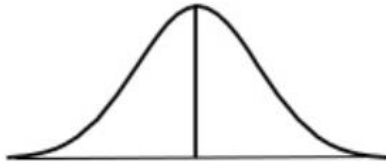
- Coeficientes de Achatamento

Para avaliar o peso relativo da dispersão face à localização, utiliza-se o **coeficiente**

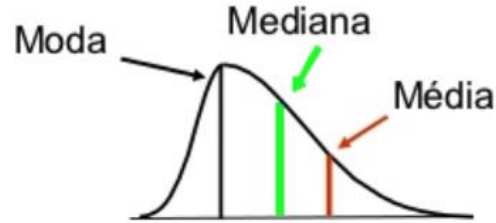
de variação: $CV = \frac{\sigma}{\mu}$ (utiliza-se sobretudo se o suporte de $X \subset \mathfrak{R}^+$)

Assimetria/Enviesamento

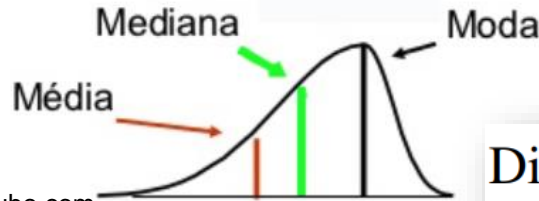
Distribuição Simétrica
Média = Mediana = Moda



Assimetria à direita ou positiva



Assimetria à esquerda ou negativa



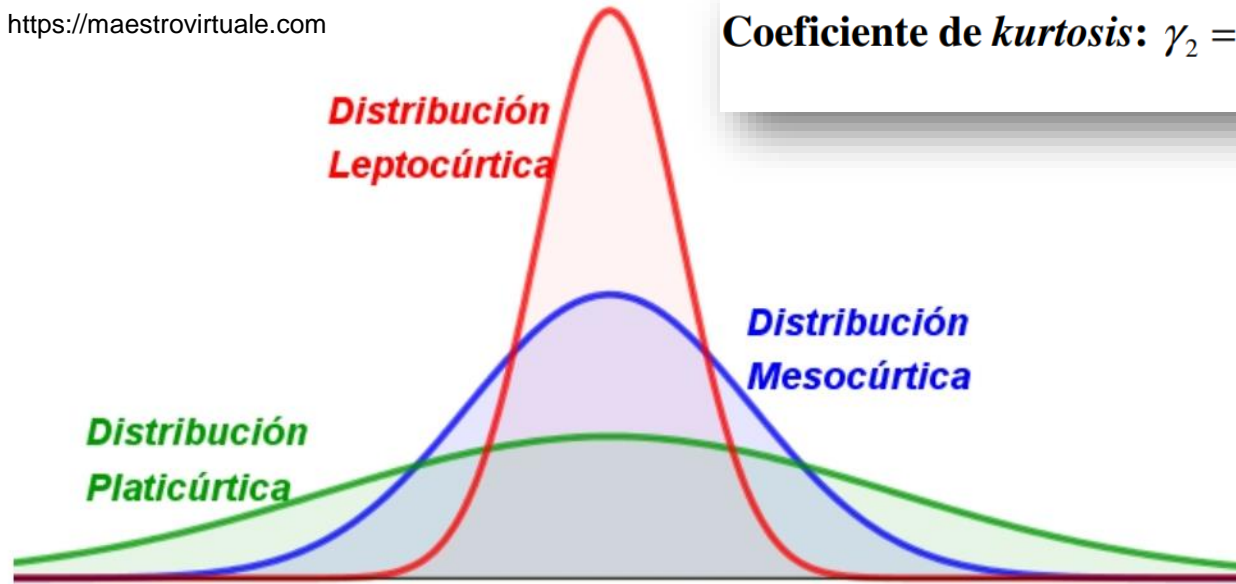
<https://dadosaocubo.com>

Distribuição simétrica $\rightarrow \gamma_1 = 0$

Coefficiente de assimetria: $\gamma_1 = \frac{E(X - \mu)^3}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$

Achatamento/Curtose/Forma

<https://maestrovirtuale.com>



Coeficiente de kurtosis: $\gamma_2 = \frac{E(X - \mu)^4}{\sigma^4} = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$

o grau de afastamento de uma certa distribuição em relação à distribuição normal. Nesta distribuição tem-se $\gamma_1 = 0$, pois trata-se de uma distribuição simétrica, e $\gamma_2 = 3$.

Assimetria e Achatamento

Assimetria e curtose

A **assimetria** γ_1 , a **curtose** β_2 e a curtose normalizada γ_2 são obtidas a partir das fórmulas

$$\text{dos momentos} \begin{cases} \gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 0 \\ \beta_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3 \\ \gamma_2 = \beta_2 - 3 = 0 \end{cases} \quad [49]$$

A distribuição normal é um ponto de referência para comparação das espessuras de **caudas longas**. Se uma distribuição possui uma curtose normalizada $\gamma_2 > 0$, então a distribuição possui uma cauda longa mais grossa que a distribuição normal e é chamada leptocúrtica. Se $\gamma_2 < 0$, a distribuição possui uma cauda longa mais fina que a distribuição normal e é chamada platicúrtica. Se a distribuição possui uma curtose normalizada nula, então a distribuição possui uma cauda longa comparável à distribuição normal e é chamada mesocúrtica. [50][51]

[Distribuição normal – Wikipédia, a enciclopédia livre \(wikipedia.org\)](https://pt.wikipedia.org/wiki/Distribui%C3%A7%C3%A3o_normal)



Variáveis Aleatórias Contínuas: Exercícios

Variável Aleatória, Função de Distribuição, Função Densidade de Probabilidade, Valor Esperado, Moda, Variância e Quantis

2

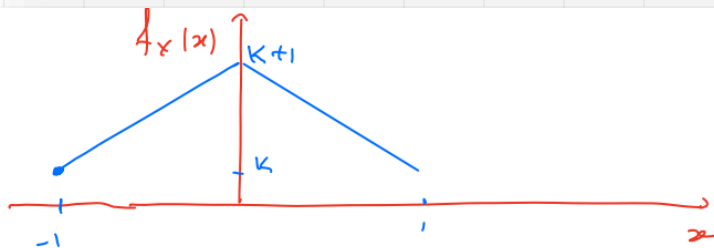
4.1 Suponha que o desvio da medida das peças produzidas por uma máquina em relação à norma especificada pelo mercado é uma variável aleatória X com a seguinte função de densidade de probabilidade:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 + k + x & , -1 \leq x < 0 \\ 1 + k - x & , 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \text{restantes valores de } x \end{cases}$$

- (a) Calcule o valor de k .
- (b) Determine a função de distribuição de X .
- (c) Calcule o valor esperado e a variância de X .
- (d) Calcule a moda, a mediana e o 1^o quartil de X .
- (e) Calcule a probabilidade de que seja necessário extrair exactamente duas peças da produção da máquina para que apareça uma peça com um desvio positivo em relação à norma.



Exercício 4.1. (a): Função Densidade de Probabilidade



$$K: \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1 \quad (\Rightarrow) \int_{-1}^0 (1+k+2x) dx + \int_0^1 (1+k-2x) dx = 1$$

$$\Leftrightarrow 1+k + \frac{0-(-1)^2}{2} + 1+k - \frac{1^2-0}{2} = 1$$

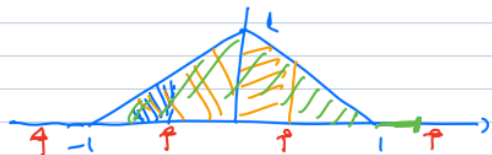
$$\Leftrightarrow 2+2k - 1 = 1 \Leftrightarrow k=0$$

ie:



□

Exercício 4.1. (b): Função de Distribuição



$$f_X(x) = \begin{cases} 1+x & -1 \leq x < 0 \\ 1-x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{e.p.} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(y) dy$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \int_{-1}^x (1+y) dy & -1 \leq x < 0 \\ 0 + \int_{-1}^0 (1+y) dy + \int_0^x (1-y) dy & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ x^2/2 + x + 1/2, & -1 \leq x < 0 \\ -x^2/2 + x + 1/2, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

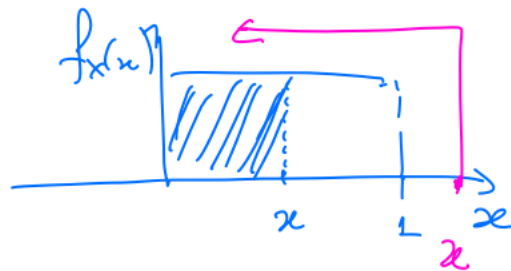
Tabela 1.1: Tabela de Primitivas Elementares

f	$Pf=F$
$c, c \in \mathbb{R}$	$c x$
$x^\alpha (\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$	$\log x $
e^x	e^x
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\sec^2 x$	$\operatorname{tg} x$
$\operatorname{cosec}^2 x$	$-\operatorname{cotg} x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcsin} x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\sinh x$	$\cosh x$

Exercício 4.1. (b): Função de Distribuição

Outro exemplo:

$$f_x(x) = \begin{cases} L & x \in [0, 1] \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

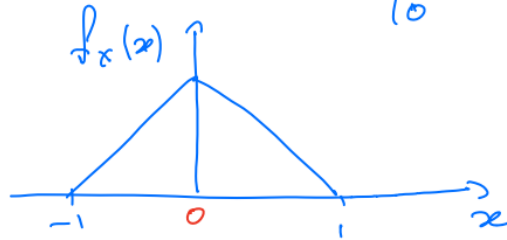


$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x = \int_0^x 1 dy & 0 \leq x < L \\ L = \int_{-\infty}^x f_x(y) dy & x \geq L \end{cases}$$

$$= 0 + \int_0^L L dy + 0 \quad (\text{localização do } x)$$

Exercício 4.1. (c): Valor Médio e Variância

Relembra: $f_X(x) = \begin{cases} 1+x & -1 \leq x < 0 \\ 1-x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{e.c.} \end{cases}$



$$\begin{aligned} \text{c) } E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_{-1}^0 x(1+x) dx + \int_0^1 x(1-x) dx \\ &= \int_{-1}^0 (x+x^2) dx + \int_0^1 (x-x^2) dx \\ &= \frac{0^2 - (-1)^2}{2} + \frac{0^3 - (-1)^3}{3} + \frac{1^3 - 0^2}{2} - \frac{1^3 - 0^3}{3} = 0 \end{aligned}$$

NOTA: se a f. densidade de probabilidade for simétrica em torno de um ponto, esse ponto é o valor esperado de X .

Exercício 4.1. (c): Valor Médio e Variância

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_{-1}^0 x^2(1+x) dx + \int_0^1 x^2(1-x) dx \\ &= \int_{-1}^0 (x^2 + x^3) dx + \int_0^1 (x^2 - x^3) dx \end{aligned}$$

$$= \frac{0^3 - (-1)^3}{3} + \frac{0 - (-1)^4}{4} + \frac{1^3 - 0^3}{3} - \frac{1^4 - 0}{4}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{2}{3} - \frac{2}{4} = \frac{8-6}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{1}{6} - 0^2 = \frac{1}{6}$$

$$E(X) = 0; \text{Var}(X) = 1/6$$

Slides Professora Cláudia Nunes

Exercício 4.1. (d): Moda, Mediana e 1º Quartil

Relembra: $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(s) ds$



$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ \int_{-1}^x (1+s) ds = \textcircled{x} & -1 < x \leq 0 \\ \underbrace{\int_{-1}^0 (1+s) ds}_{0.5} + \int_0^x (1-s) ds & 0 < x < 1 \\ 1.0 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\textcircled{x} = \int_{-1}^x (1+s) ds = (x+1) + \frac{x^2 - (-1)^2}{2} = \boxed{x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}}$$

$$F_X(0) = \frac{1}{2} = 0.5 \Rightarrow \text{mediana} = 0$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ x^2/2 + x + 1/2, & -1 \leq x < 0 \\ -x^2/2 + x + 1/2, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

moda = 0; mediana = 0

Exercício 4.1. (d): Moda, Mediana e 1º Quartil

$x_{0.25} \Rightarrow$ ponto p/0 qual = função de distribuição
é igual = 0.25

$$F_X(x_{0.25}) = 0.25 \quad (x_{0.25} \in]-1, 0[)$$

$$x^2/2 + x + 1/2 = 0.25 \Rightarrow y = \begin{cases} \in]-1, 0[\\ \square \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ x^2/2 + x + 1/2, & -1 \leq x < 0 \\ -x^2/2 + x + 1/2, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Slides Professora Cláudia Nunes

$$F_X^{-1}(1/4) = -1 + \sqrt{2}/2$$

Exercício 4.1. (e): Probabilidades

Curiosidade

Y – v.a. que representa o nº de peças que é necessário extrair da produção da máquina para termos uma peça com um desvio positivo em relação à norma.

Notação: $Y \sim \text{Geo}(p)$.

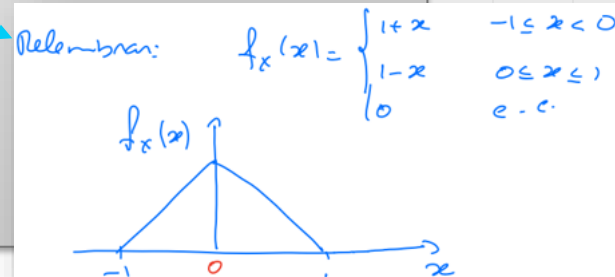
$p = P(\text{"de uma peça ter desvio positivo em relação à norma"}) = P(X > 0) = 1/2$, sendo X a v.a. definida em 4.1

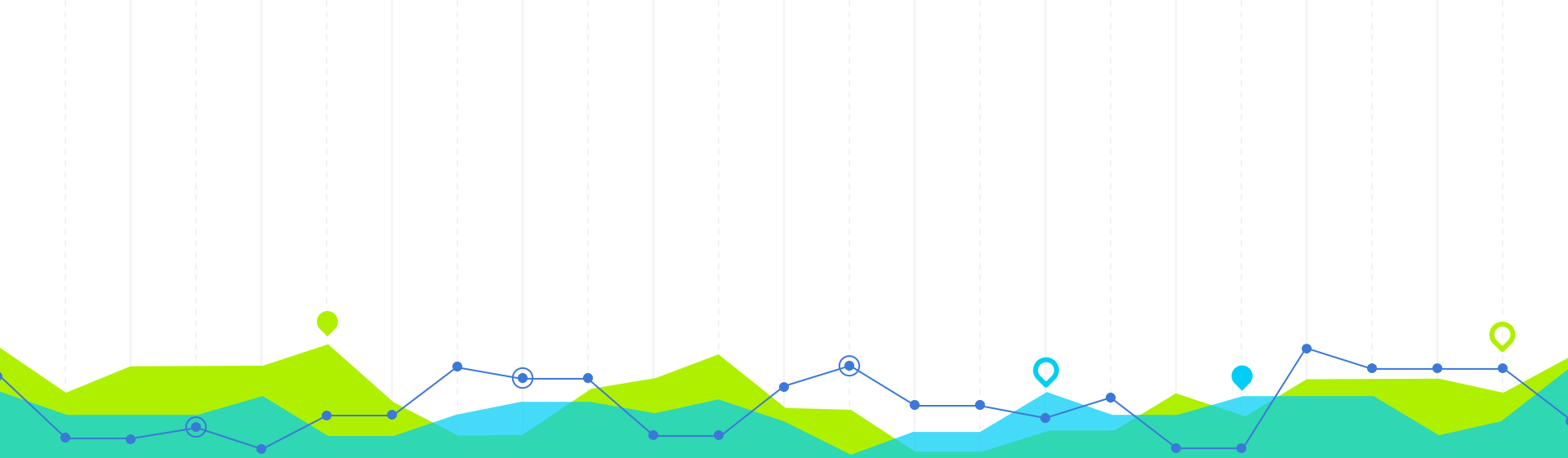
Logo, tem-se $P(Y=2) = 0,5 \times (1-0,5) = 0,25 = 1/4$

$$P(X = x) = p(1 - p)^{x-1}$$

$$x = 1, 2, \dots$$

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{Var}(X) = \frac{(1-p)}{p^2}$$





Variáveis Aleatórias Mistas

3

Variável Aleatória Mista

- X é um **variável aleatória mista** se a respectiva função de distribuição pode ser escrita como $F(x) = \lambda F_1(x) + (1 - \lambda)F_2(x)$, ($0 < \lambda < 1$) onde:
 - $F_1 \rightarrow$ função de distribuição associada a uma variável aleatória discreta;
 - $F_2 \rightarrow$ função de distribuição associada a uma variável aleatória contínua.

Murteira et al (2015)

Variável Aleatória Mista: Exemplo

Seja $U \sim \text{Unif}([0, 4])$. Seja X uma VA definida da seguinte maneira:

- Se $U \leq 1$, então $X \sim \text{Unif}([0, 2])$.
- Caso contrário, então $X \sim \text{Bern}(2/3)$.

Pelo **teorema da probabilidade total**:

$$f_X(x) = \underbrace{f_X(x \mid U \leq 1)}_{\sim \text{Unif}([0,2])} \underbrace{\Pr[U \leq 1]}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{f_X(x \mid U > 1)}_{\sim \text{Bern}(2/3)} \underbrace{\Pr[U > 1]}_{\frac{3}{4}}$$

Obrigada!

Questões?

